

Nos hemos quedado encallados en la página 15, en la demostración del teorema 1.1. En el paso que no veíamos, el autor nos invita a *notar* que:

$$\left(\frac{1}{|\Omega|}\right) f + \left(1 - \frac{1}{|\Omega|}\right) a_0 = \left(\frac{1}{|\Omega|}\right) \sum_{t \in \Omega} \sum_{x \in X} f(x|t) c_{x,t}.$$

La igualdad se da, en efecto, pero nos ha costado un rato demostrarlo (nada de *notar*).

Lo primero es reorganizar el miembro de la izquierda para dejar un solo  $\frac{1}{|\Omega|}$  de factor común, como a la derecha:

$$\left(\frac{1}{|\Omega|}\right) [f + (|\Omega| - 1) a_0], \text{ o sea que lo que hay que demostrar es que}$$

$$[A] f + (|\Omega| - 1) a_0 = \sum_{t \in \Omega} \sum_{x \in X} f(x|t) c_{x,t}^1.$$

Esto es una igualdad entre dos loterías, es decir, entre dos funciones de dos argumentos (un premio y un estado del mundo). Por lo tanto, demostrar la igualdad es tanto como demostrar que ambas funciones arrojan el mismo resultado (el mismo valor de probabilidad) para cualquier par de argumentos. A nosotros nos ha resultado útil resolver los sumatorios de la derecha en un caso concreto, para hacernos a la idea de qué aspecto tiene esta lotería. Supongamos, pues, que el conjunto de estados del mundo es

$$\Omega = \{a, b, c\}$$

y el conjunto de premios posibles es

$$X = \{1, 2, 3\}.$$

En ese caso, el desarrollo de los sumatorios del miembro de la derecha de [A] da el siguiente resultado:

$$\begin{aligned} & f(1|a)c_{1,a} + f(2|a)c_{2,a} + f(3|a)c_{3,a} + \\ & + f(1|b)c_{1,b} + f(2|b)c_{2,b} + f(3|b)c_{3,b} + \\ & + f(1|c)c_{1,c} + f(2|c)c_{2,c} + f(3|c)c_{3,c}. \end{aligned}$$

Veamos qué resultado arroja esta lotería para, p. ej., los argumentos  $x = 2$  y  $t = a$ .

Como  $c_{x,t}(y|u)$  equivale a  $a_0(y|u)$  para cualquier  $u \neq t$ , la segunda y tercera filas de la suma de más arriba equivalen a:

$$\begin{aligned} & a_0 (f(1|b) + f(2|b) + f(3|b)) + \\ & a_0 (f(1|c) + f(2|c) + f(3|c)). \text{ Esto es,} \\ & a_0 (\sum_{x \in X} f(x|b) + \sum_{x \in X} f(x|c)). \end{aligned}$$

Ambos sumatorios suman 1<sup>2</sup>, así que el resultado de dichas segunda y tercera filas es  $2a_0$ . En general, si os fijáis, para desarrollos arbitrarios de los sumatorios del miembro de la derecha de [A], todas las filas sumarán  $a_0$  excepto una. Dado que hay tantas filas como miembros del conjunto de estados del mundo (esto es, dado que hay  $|\Omega|$  filas), en general para argumentos  $y$  y  $u$ :

$$\sum_{t \in \Omega} \sum_{x \in X} f(x|t) c_{x,t} = \sum_{x \in X} f(x|u) c_{x,u} + (|\Omega| - 1) a_0.$$

Esto se va pareciendo ya al miembro de la izquierda de la igualdad de [A]. Sólo resta demostrar que  $f = \sum_{x \in X} f(x|u) c_{x,u}$  para que se parezca del todo. Efectivamente, se demuestra: como, según hemos dicho, los argumentos con los que alimentamos a la función son  $y$  y  $u$ ,  $c_{x,u}(y|u)$  será igual a 0 para  $y \neq u$

<sup>1</sup>Hay que notar que el autor utiliza profusamente una notación abreviada que no ha introducido:  $f$  por  $f(x|t)$ , donde  $f$  es cualquier lotería y  $x$  y  $t$  sus argumentos.

Así,  $c_{x,t}$  está por  $c_{x,t}(y|u)$ ,  $a_0$  está por  $a_0(x|t)$ , etc.

<sup>2</sup>¿Por qué? Ver p. 7, segundo párrafo.

e igual a 1 para  $y = x$ . Así que todos los términos de este último sumatorio se anularán excepto el sumando  $f(y|u) c_{x,u}$ , que será igual a  $f(y|u)$ . O sea, que para argumentos cualesquiera  $y$  y  $u$ ,  $\sum_{x \in X} f(x|u) c_{x,u} = f(y|u)$ . Esto es (y aplicando la convención de abreviación del libro),  $\sum_{x \in X} f(x|u) c_{x,u} = f$ . Juntándolo todo nos sale que

$$\sum_{t \in \Omega} \sum_{x \in X} f(x|t) c_{x,t} = f + (|\Omega| - 1) a_0$$

que es [A] y, por tanto, lo que queríamos demostrar.